

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

21. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 28. lipnja 2010. u 10 sati**.

1

ZADATAK 1

--

(15 bodova.) Može li niz potencija $\{x^n \mid n \geq 0\}$ biti niz **ortogonalnih** polinoma s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w , na nekom intervalu $[a, b]$, uz $a < b$? Precizno argumentirajte odgovor!



NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nadite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nadite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (3x + 1)\sqrt{x + 2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0, 2]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε , ako za interpolaciju koristimo

- (a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[0, 2]$,
- (b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(1.3)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

21. lipnja 2010.

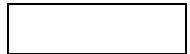
(15 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nadite funkciju oblika

$$y(x) = \frac{a}{x} + bx,$$

koja zadovoljava uvjet $y(2) = 0$ i aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4
y_i	-0.8	0.0	0.4	0.8

.Nadite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S .**Zabranjeno** je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!



NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 e^x f(x) dx \approx w_0 f(1/3) + w_1 f(3/4),$$

te čvor x_1 i težinu \tilde{w}_1 u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 e^x f(x) dx \approx \tilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \sin(\pi x/2)$ i nađite prave greške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Nadite najmanje rješenje jednadžbe

$$e^{-x} = \left(\sin x - \frac{5}{4} \right)^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.**Napomena:** Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

21. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent! Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 28. lipnja 2010. u 10 sati**.

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Može li integracijska formula

$$I(f) = -\frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)$$

biti **interpolacijska** s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w , na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži čvorove $1/3$ i $1/2$? Precizno argumentirajte odgovor!



NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Nadite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nadite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (2x - 1)\sqrt{x + 1}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0, 2]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε , ako za interpolaciju koristimo

- (a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[0, 2]$,
- (b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(0.7)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

21. lipnja 2010.

(15 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nadite funkciju oblika

$$y(x) = a \ln x + bx,$$

koja zadovoljava uvjet $y'(2) = 0$ i aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4
y_i	0.5	0.3	0.4	0.6

Nadite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S .**Zabranjeno** je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!



NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot f(x) dx \approx w_0 f(\pi/6) + w_1 f(\pi/3),$$

te čvor x_1 i težinu \tilde{w}_1 u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot f(x) dx \approx \tilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomi stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = e^{-x}$ i nađite prave greške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Nadite najmanje rješenje jednadžbe

$$e^{-x} = (\sin x - 1)^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.**Napomena:** Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

21. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 28. lipnja 2010. u 10 sati**.

1

ZADATAK 1

--

(15 bodova.) Mogu li polinomi $(x + 1)^2$ i $(x - 1)^3$ biti članovi niza **ortogonalnih** polinoma s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w , na nekom intervalu $[a, b]$, uz $a < b$? Precizno argumentirajte odgovor!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Nadite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nadite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

21. lipnja 2010.

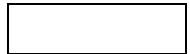
(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (3x + 2)\sqrt{x + 2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0, 2]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε , ako za interpolaciju koristimo

- (a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[0, 2]$,
- (b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(1.6)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.



NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

21. lipnja 2010.

(15 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nadite funkciju oblika

$$y(x) = a\sqrt{x} + bx,$$

koja zadovoljava uvjet $y(1/4) = 0$ i aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4
y_i	0.3	0.6	1.1	1.5

.Nadite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S .**Zabranjeno** je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx \approx w_0 f(1/5) + w_1 f(2/3),$$

te čvor x_1 i težinu \tilde{w}_1 u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 e^{-x} f(x) dx \approx \tilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \cos(\pi x/2)$ i nađite prave greške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Nadite najveće rješenje jednadžbe

$$e^x = \left(\sin x + \frac{3}{2} \right)^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

21. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent! Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 28. lipnja 2010. u 10 sati**.

ZADATAK 1

1

(15 bodova.) Može li integracijska formula

$$I(f) = \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{4}\right)$$

biti **Gaussova** integracijska formula s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w , na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži čvorove $1/3$, $1/2$ i $3/4$? Precizno argumentirajte odgovor!



NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Nadite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nadite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

21. lipnja 2010.

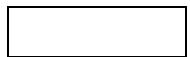
(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (2x + 1)\sqrt{x + 1}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0, 2]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε , ako za interpolaciju koristimo

- (a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[0, 2]$,
- (b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(0.3)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.



NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

21. lipnja 2010.

(15 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nadite funkciju oblika

$$y(x) = ax^2 + bx,$$

koja zadovoljava uvjet $y'(2) = 0$ i aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4
y_i	1.5	2.0	1.4	0.1

.Nadite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S .**Zabranjeno** je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!



NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot f(x) dx \approx w_0 f(\pi/8) + w_1 f(2\pi/5),$$

te čvor x_1 i težinu \tilde{w}_1 u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot f(x) dx \approx \tilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomi stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = e^x$ i nađite prave greške.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Nadite najveće rješenje jednadžbe

$$e^x = (\sin x + 2)^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.**Napomena:** Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!