JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

21. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 28. lipnja 2010. u 10 sati**.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Može li niz potencija $\{x^n \mid n \geq 0\}$ biti niz **ortogonalnih** polinoma s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w, na nekom intervalu $[a, b]$, uz $a < b$? Precizno argumentirajte odgovor!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 2

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (3x+1)\sqrt{x+2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0,2]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n+1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε, ako za interpolaciju koristimo

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[0,2]$,

(b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[0,1]$ i $[1,2]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(1.3)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

21. lipnja 2010.

(15 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = \frac{a}{x} + bx,$$

koja zadovoljava uvjet $y(2) = 0$ i aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4
y_i	-0.8	0.0	0.4	0.8

.

Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S.

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx \approx w_0 f(1/3) + w_1 f(3/4),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \sin(\pi x/2)$ i nađite prave greške.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 6

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$e^{-x} = \left(\sin x - \frac{5}{4}\right)^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

21. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 28. lipnja 2010. u 10 sati**.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.) Može li integracijska formula

$$I(f) = -\frac{1}{3}\, f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\, f\left(\frac{1}{2}\right)$$

biti **interpolacijska** s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w, na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži čvorove $1/3$ i $1/2$? Precizno argumentirajte odgovor!

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 2

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (2x-1)\sqrt{x+1}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0,2]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n+1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε, ako za interpolaciju koristimo

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[0,2]$,

(b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[0,1]$ i $[1,2]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(0.7)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

21. lipnja 2010.

(15 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = a \ln x + bx,$$

koja zadovoljava uvjet $y'(2) = 0$ i aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4
y_i	0.5	0.3	0.4	0.6

Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S.

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot f(x)\, dx \approx w_0 f(\pi/6) + w_1 f(\pi/3),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot f(x)\, dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = e^{-x}$ i nađite prave greške.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 6

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$e^{-x} = (\sin x - 1)^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

21. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 28. lipnja 2010. u 10 sati**.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Mogu li polinomi $(x+1)^2$ i $(x-1)^3$ biti članovi niza **ortogonalnih** polinoma s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w, na nekom intervalu $[a, b]$, uz $a < b$? Precizno argumentirajte odgovor!

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (3x + 2)\sqrt{x + 2}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0, 2]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n + 1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε, ako za interpolaciju koristimo

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[0, 2]$,

(b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(1.6)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 4

21. lipnja 2010.

(15 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = a\sqrt{x} + bx,$$

koja zadovoljava uvjet $y(1/4) = 0$ i aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4
y_i	0.3	0.6	1.1	1.5

Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S.

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)\, dx \approx w_0 f(1/5) + w_1 f(2/3),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^1 e^{-x} f(x)\, dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \cos(\pi x/2)$ i nađite prave greške.

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$e^x = \left(\sin x + \frac{3}{2}\right)^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij

21. lipnja 2010.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **ponedjeljak, 28. lipnja 2010. u 10 sati**.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Može li integracijska formula

$$I(f) = \frac{1}{3}\, f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}\, f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\, f\left(\frac{3}{4}\right)$$

biti **Gaussova** integracijska formula s nekom pozitivnom težinskom funkcijom w, na nekom intervalu $[a, b]$ koji sadrži čvorove $1/3$, $1/2$ i $3/4$? Precizno argumentirajte odgovor!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 2

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 3

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (2x+1)\sqrt{x+1}$$

treba aproksimirati po dijelovima linearnom interpolacijom φ na intervalu $[0, 2]$ tako da ocjena uniformne pogreške ne prelazi $\varepsilon = 10^{-4}$ na cijelom intervalu. Nađite najmanji broj čvorova interpolacije $n+1$ potrebnih da se postigne tražena točnost ε, ako za interpolaciju koristimo

(a) ekvidistantnu mrežu na cijelom intervalu $[0, 2]$,

(b) zasebne ekvidistantne mreže na podintervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$.

U oba slučaja izračunajte aproksimaciju za $f(0.3)$ i pripadnu stvarnu pogrešku.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

21. lipnja 2010.

(15 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = ax^2 + bx,$$

koja zadovoljava uvjet $y'(2) = 0$ i aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1	2	3	4
y_i	1.5	2.0	1.4	0.1

.

Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S.

Zabranjeno je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 5

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Odredite težine w_0 i w_1 u težinskoj Newton–Cotesovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot f(x)\,dx \approx w_0 f(\pi/8) + w_1 f(2\pi/5),$$

te čvor x_1 i težinu $\widetilde{w}_1$ u odgovarajućoj Gaussovoj integracijskoj formuli

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot f(x)\,dx \approx \widetilde{w}_1 f(x_1).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = e^x$ i nađite prave greške.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — popravni kolokvij — Zadatak 6

21. lipnja 2010.

(20 bodova.) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$e^x = (\sin x + 2)^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem 1/2.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!